§1. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1.1 ĐỊNH NGHĨA

Cho E và F là hai không gian véc tơ trên cùng một trường K. *Một ánh xạ f từ E vào F được gọi là tuyến tính nếu nó thoả mãn điều kiện sau:*

L_1: Với mọi $u,v \in E$ ta có $f(u+v) = f(u) + f(v)$;

L_2: Với mọi $\alpha \in K$, với mọi $u \in E$ ta có: $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

Từ L_1 ta suy ra: với $0 \in E$ ta có $f(0) = 0$, $(0 \in F)$

Thật vậy: $f(u) = f(u+0) = f(u) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$.

Ta có thể viết gộp hai điều kiện L_1, L_2 thành:

Ánh xạ $f : E \to F$ là tuyến tính $\Leftrightarrow \forall v_1, v_2 \in E, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K$ ta có:

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$$

Một cách tổng quát hơn, ta có:

$$\forall v_i \in E, \forall \alpha_i \in K, f\left(\sum \alpha_i v_i\right) = \sum \alpha_i f(v_i),\ i = 1,2,\ldots,n.$$

Điều kiện trên nói lên rằng ánh xạ tuyến tính *bảo toàn tổ hợp tuyến tính của các véc tơ.*

Ví dụ 1: Cho ánh xạ $f : R^2 \to R$ xác định bởi

$f(x,y) = 3x - 2y;\ \forall (x,y) \in R^2$. Hãy chứng tỏ rằng ánh xạ f là tuyến tính.

Lấy $u, v \in R^2$, $u = (a,b)$, $v = (c,d)$ và $\alpha \in R$ ta có:

$f(u+v) = f(a+c, b+d) = 3(a+c) - 2(b+d) = (3a - 2b) + (3c - 2d) = f(u) + f(v)$

$f(\alpha u) = f(\alpha a, \alpha b) = 3\alpha a - 2\alpha b = \alpha(3a - 2b) = \alpha f(u)$

Cả hai điều kiện L_1, L_2 đều thoả mãn, vậy ánh xạ f là tuyến tính.

Ví dụ 2: Xét không gian P các đa thức có bậc không vượt quá n. Cho ánh xạ $f : P \to P$ xác định bởi $f(v) = v'$ (đạo hàm của v), với $v \in P$. Ta thấy rằng ánh xạ f là tuyến tính.

Với $u, v \in P$ ta có $f(u+v) = (u+v)' = u' + v' = f(u) + f(v)$.

Với $\alpha \in R, f(\alpha u) = (\alpha u)' = \alpha u' = \alpha f(u)$.

Cả hai điều kiện L_1, L_2 đều thoả mãn.

1.2 NHÂN VÀ ẢNH CỦA MỘT ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Cho E và F là hai không gian véc tơ trên một trường K, f là một ánh xạ tuyến tính từ E vào F.

Định nghĩa 1. Ta gọi ***nhân*** của ánh xạ f là tập hợp các véc tơ v của E sao cho $f(v) = 0$. Ta ký hiệu nhân của f là $\ker f$.

Như vậy: $\ker f = \{v, v \in E : f(v) = 0\}$

Tập hợp $\ker f$ là một không gian con của E. Thật vậy, tập $\ker f$ không rỗng vì ít nhất nó cũng chứa phần tử không $f(0) = 0$; hơn nữa nếu $u, v \in \ker f$, tức là $f(u) = 0, f(v) = 0$, do f là tuyến tính nên $f(u+v) = f(u) + f(v) = 0$, từ đó suy ra $u + v \in \ker f$.

Ví dụ: Xét không gian V các véc tơ hình học. Cho trước một véc tơ $u \in V$, với mỗi một véc tơ $v \in V$ ta xét ánh xạ $f : V \to R$ xác định bởi $f(v) = u.v$ (tích vô hướng của hai véc tơ u và v). Chứng tỏ rằng f là ánh xạ tuyến tính và tìm $\ker f$.

Theo tính chất của tích vô hướng ta có:

$$f(v_1 + v_2) = u(v_1 + v_2) = uv_1 + uv_2 = f(v_1) + f(v_2);$$

$$f(\alpha v) = u(\alpha v) = \alpha(uv) = \alpha f(v)$$

Vậy f là ánh xạ tuyến tính. Bây giờ ta đi tìm nhân của ánh xạ f.

$f(v) = 0 \Leftrightarrow uv = 0 \Leftrightarrow$ các véc tơ phải vuông góc với véc tơ u đã cho.

Vậy $\ker f$ là tập hợp mọi véc tơ vuông góc với véc tơ u đã cho.

Định lý 1. *Ánh xạ tuyến tính f là đơn ánh khi và chỉ khi nhân của f chỉ chứa phần tử không.* f đơn ánh $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$

Ta nhắc lại ánh xạ f là đơn ánh nếu $x \neq y$ thì $f(x) \neq f(y)$.

Do đó với $v \neq 0$ ta có $f(v) \neq f(0)$, nhưng $f(0) = 0$ tức là với mọi phần tử $v \neq 0$ ta có $f(v) \neq 0$, ta suy ra $v \notin \ker f$, $\ker f$ chỉ chứa phần tử không.

Đảo lại, giả sử $\ker f = \{0\}$. Gọi u và v là các phần tử của E sao cho ta có $f(u) = f(v)$. Ta phải chứng minh f là đơn ánh tức là phải chứng minh $u = v$.

Thật vậy, do ánh xạ f là tuyến tính nên: $f(u - v) = f(u) - f(v) = 0$.

Ta suy ra $u - v \in \ker f$. Nhưng vì $\ker f = \{0\}$ nên $u - v = 0$ tức là $u = v$.

Vậy f là đơn ánh.

Định lý 2. *Giả sử f là một ánh xạ tuyến tính từ E vào F, nhân của f chỉ chứa phần tử không. Khi đó, nếu $v_1, v_2, \ldots, v_n$ là các véc tơ độc lập tuyến tính của E thì $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ cũng độc lập tuyến tính trong F. Ngược lại, tạo ảnh của một hệ độc lập luôn độc lập.*

Chứng minh: Giả sử $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là các số sao cho: $\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \ldots + \alpha_n f(v_n) = 0$. Ta phải chứng minh $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ (xem định nghĩa hệ véc tơ độc lập tuyến tính ở chương 2).

Theo tính tuyến tính của f ta có: $f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = 0$

Từ định nghĩa của nhân f ta suy ra: $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \in \ker f$

Theo giả thiết $\ker f = \{0\}$ nên $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$

Vì $v_1, v_2, \ldots, v_n$ độc lập tuyến tính nên từ hệ thức trên ta suy ra $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Vậy $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ độc lập tuyến tính trong F.

Ngược lại: Giả sử $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ độc lập tuyến tính trong F. Xét tổ hợp $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$. Qua ánh xạ tuyến tính f ta có: $f\left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n\right) = 0 \Rightarrow \alpha_1 f\left(v_1\right) + \alpha_2 f\left(v_2\right) + \ldots + \alpha_n f\left(v_n\right) = 0$. Do hệ $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ độc lập tuyến tính trong F nên ta có $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ hay hệ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ độc lập tuyến tính.

Định nghĩa 2. *Ảnh của một ánh xạ tuyến tính f là tập hợp các véc tơ $w \in F$ sao cho tồn tại phần tử $v \in E$ để $f(v) = w$.* Ta ký hiệu ảnh của f là $\operatorname{Im} f$.

$$\operatorname{Im} f = \{w, w \in F : \exists v \in E, f(v) = w\}.$$

Ta có tập $\operatorname{Im} f$ *là một không gian con của* F.

Thật vậy, tập $\operatorname{Im} f$ không rỗng, nó chứa phần tử không ($f(0) = 0$).

Nếu $w_1, w_2 \in \operatorname{Im} f$ thì tồn tại $v_1, v_2 \in \ker f$ sao cho $f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2$.

Từ đó: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = w_1 + w_2$, tức là: $w_1 + w_2 \in \operatorname{Im} f$

Nếu: $w \in \operatorname{Im} f$ thì có $v \in E, f(v) = w$. Từ đó: $f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha w.$ Vậy $\alpha w \in \operatorname{Im} f$

Định lý 3 (định lý nhân - ảnh).

Giả sử f là ánh xạ tuyến tính từ không gian véc tơ E vào không gian véc tơ F. Nếu số chiều của E là n, số chiều của nhân f là q và số chiều của ảnh f là s thì ta có: $n = q + s$.

Nói cách khác: $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$.

Chứng minh: Giả sử $w_1, w_2, ..., w_s$ là một cơ sở của $\operatorname{Im} f$. Khi đó có các véc tơ $v_1, v_2, ..., v_s \in E$ sao cho $f(v_i) = w_i, i = 1, 2, ..., s$. Gọi $u_1, u_2, ..., u_q$ là một cơ sở của $\ker f$. Ta sẽ chứng tỏ hệ véc tơ: $v_1, v_2, ..., v_s, u_1, u_2, ..., u_q$ lập thành một cơ sở của E.

Với $v \in E$ thì $f(v) \in \operatorname{Im} f$, ta biểu diễn $f(v)$ theo cơ sở $w_1, w_2, ..., w_s$ của $\operatorname{Im} f$:

$f(v) = x_1 w_1 + x_2 w_2 + ... + x_s w_s =$

$= x_1 f(v_1) + x_2 f(v_2) + ... + x_s f(v_s) = f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_s v_s).$

Từ: $f(v - x_1 v_1 - x_2 v_2 - ... - x_s v_s) = 0$, ta suy ra: $v - x_1 v_1 - x_2 v_2 - ... - x_s v_s \in \ker f$.

Ta biểu diễn phần tử đó của $\ker f$ theo cơ sở $u_1, u_2, ..., u_q$ của $\ker f$:

$$v - x_1 v_1 - x_2 v_2 - ... - x_s v_s = y_1 u_1 + y_2 u_2 + ... + y_q u_q$$

hay: $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_s v_s + y_1 u_1 + y_2 u_2 + ... + y_q u_q$

Hệ các véc tơ $v_1, v_2, ..., v_s, u_1, u_2, ..., u_q$ là một hệ các phần tử sinh của E.

Để chứng minh chúng lập thành một cơ sở của E ta chỉ còn phải chứng minh chúng độc lập tuyến tính.

Xét tổ hợp tuyến tính:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_s v_s + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + ... + \beta_q u_q = 0 \qquad (1)$$

Tác động ánh xạ f vào nó và để ý tới tính tuyến tính của f ta có:

$$\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + ... + \alpha_s f(v_s) + \beta_1 f(u_1) + \beta_2 f(u_2) + ... + \beta_q f(u_q) = 0$$

Vì $u_1, u_2, ..., u_q \in \ker f$ nên $f(u_1) = f(u_2) = ... = f(u_q) = 0$, ta có :

$\alpha_1 f(v_1) + ... + \alpha_s f(v_s) = 0$.

Thay $\mathrm{w_i} = f(v_i)$ vào hệ thức trên ta được:

$$\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_s w_s = 0$$

Vì $w_1, w_2, ..., w_s$ là cơ sở nên chúng độc lập tuyến tính, do đó ta suy ra:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_s = 0 \qquad (2)$$

Thay vào (1) ta được: $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + ... + \beta_q u_q = 0$

Vì $u_1, u_2, ..., u_q$ là cơ sở nên chúng độc lập tuyến tính, từ hệ thức trên ta suy ra:

$$\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_q = 0 \qquad (3)$$

Các kết quả (2), (3) cùng với (1) chứng tỏ các véc tơ $v_1, v_2, ..., v_s, u_1, u_2, ..., u_q$ lập thành một cơ sở của E. Điều đó chứng tỏ $\dim E = s + q = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$.

Định lý đã được chứng minh.

1.3 MA TRẬN VÀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Cho ma trận A loại $(m \times n)$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$

Xét các không gian véc tơ R^n và R^m. Ta biểu diễn các véc tơ của không gian đó bằng các véc tơ cột. Với mọi $v \in R^n$ ta xác định ánh xạ:

$$f : R^n \to R^m \text{ xác định bởi } f(v) = Av$$

(khi nhân một ma trận loại $(m \times n)$ với ma trận cột loại $(n \times 1)$ (đó là một phần tử của R^n), ta được một ma trận cột loại $(m \times 1)$ (đó là một phần tử của R^m)).

Bằng phép tính ma trận ta thấy rằng ánh xạ f là tuyến tính:

Với $u, v \in R^n$ ta có: $f(u+v) = A(u+v) = Au + Av = f(u) + f(v)$;

Với số α ta có: $f(\alpha u) = A(\alpha u) = \alpha Au = \alpha f(u)$

Gọi $x_1, x_2, ..., x_n$ là các toạ độ của véc tơ v trong R^n; $y_1, y_2, ..., y_m$ là các toạ độ của véc tơ $f(v)$ trong R^m theo các cơ sở đã chọn trước trong các không gian đó ta có thể viết biểu thức $f(v) = Av$ dưới dạng ma trận:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

Như vậy, cho một ma trận A loại $(m \times n)$ ta có thể xác định được một ánh xạ tuyến tính từ một không gian $m-$ chiều vào một không gian $n-$ chiều, ánh xạ đó được xác định bởi $f(v) = Av$, với v là véc tơ cột thuộc R^n. Ma trận A được gọi là *ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong các cơ sở đã chọn của R^n và R^m*.

Ngược lại, cho một ánh xạ tuyến tính $f: R^n \to R^m$ thì ta có thể tìm được ma trận của ánh xạ đó trong các cơ sở đã chọn của R^n *và* R^m.

Giả sử: $(e_1, e_2, ..., e_n)$ là một cơ sở của R^n; $(f_1, f_2, ..., f_m)$ là một cơ sở của R^m.

Với $v \in R^n$ ta có: $v = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$

Do f là ánh xạ tuyến tính nên:

$$f(v) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + ... + x_nf(e_n) \quad (4)$$

Vì $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)$ là các véc tơ thuộc R^m nên ta có thể biểu diễn chúng theo cơ sở $(f_1, f_2, ..., f_m)$:

$$f(e_1) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + ... + a_{m1}f_m$$
$$f(e_2) = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + ... + a_{m2}f_m$$
....
$$f(e_n) = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + ... + a_{mn}f_m$$

Thay các giá trị vừa nhận được vào vế phải của (4) ta được:

$$f(v) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)f_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n)f_2 + \\ + ... + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n)f_m \quad (5)$$

Mặt khác vì $f(v) \in R^m$ nên: $f(v) = y_1f_1 + y_2f_2 + ... + y_mf_m$ (6)

Do $f(v)$ được biểu diễn một cách duy nhất qua cơ sở $(f_1, f_2, ..., f_m)$, nên từ (5), (6) ta suy ra:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

Có thể viết kết qủa trên dưới dạng ma trận:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$Y = A.X$$

Ta đã xác định được ma trận của ánh xạ đó.

Như vậy, nếu f là ánh xạ tuyến tính từ R^n vào R^m và $(e_1, e_2, ..., e_n)$, $(f_1, f_2, ..., f_m)$ lần lượt là các cơ sở đã cho của R^n và R^m thì ma trận của ánh xạ f là một ma trận loại $(m \times n)$ có các phần tử nằm trên cột thứ j là các toạ độ của véc tơ $f(e_j)$ tính theo cơ sở đã cho của R^m.

Ví dụ: Gọi P_n là không gian các đa thức có bậc không vượt quá n. Xét ánh xạ f từ P_3 vào P_2 xác định bởi $f(v) = v'$ với $v \in P_3$ và v' là đạo hàm của v.

Như ta đã biết ánh xạ đó là tuyến tính. Ta tìm ma trận của nó trong các cơ sở $x^3, x^2, x, 1$ của P_3; $x^2, x, 1$ của P_2. Ta phải tìm ảnh của các véc tơ cơ sở của P_3 trong P_2.

Ta có:

$$\begin{aligned} f(x^3) &= (x^3)' = 3x^2 = (3, 0, 0) \\ f(x^2) &= (x^2)' = 2x = (0, 2, 0) \\ f(x) &= (x)' = 1 = (0, 0, 1) \\ f(1) &= (1)' = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Vậy ma trận của ánh xạ này là: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1.4 MA TRẬN CHUYỂN CƠ SỞ

Giả sử $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ và $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ là hai cơ sở trong cùng một không gian véc tơ E có số chiều là n.

Ta biểu diễn các véc tơ $e'_1, \ldots, e'_n$ theo các véc tơ của cơ sở B:

$$\begin{aligned} e'_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n \\ e'_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n \end{aligned} \qquad (7)$$

Định nghĩa: Ma trận:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mà cột thứ j là các toạ độ của véc tơ e'_j theo cơ sở B được gọi là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B sang cơ sở B'.

Giả sử $v \in E$.

Gọi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các toạ độ của véc tơ v theo cơ sở B

Gọi $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ là các toạ độ của nó theo cơ sở B'

Ta cần tìm công thức liên hệ giữa hai toạ độ đó.

$$v = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x'_j a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j e_i \qquad (8)$$

Mặt khác, biểu diễn v theo cơ sở B ta có:

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad (9)$$

So sánh (8) và (9) ta được: $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j; \quad i = 1, 2, \ldots, n$

Đặt $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix}$ và P là ma trận chuyển ở trên ta có: $X = P.X'$ (10)

Ta chú ý rằng ở trên ta đã chuyển từ cơ sở B sang cơ sở B'. Khi đó ma trận chuyển là P và ta có công thức (9). Ta cũng có thể chuyển từ cơ sở B' sang cơ sở B. Như vậy ma trận P phải là ma trận khả nghịch và ta có: $X' = P^{-1}X$

Vậy ma trận chuyển từ cơ sở B' sang cơ sở B là ma trận nghịch đảo P^{-1}

Ví dụ 1: Xét hệ toạ độ trực chuẩn Oxy trong mặt phẳng. Quay hệ trục này một góc α ta được hệ trục $Ox'y'$. Lập công thức chuyển toạ độ từ hệ Oxy sang hệ $Ox'y'$.

Gọi e_1, e_2 là các véc tơ đơn vị trên các trục số Ox, Oy;

e'_1, e'_2 là các véc tơ đơn vị trên các trục số Ox', Oy', ta có:

$e'_1 = e_1 \cos\alpha + e_2 \sin\alpha$

$e'_2 = e_1 \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + e_2 \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -e_1 \cos\alpha + e_2 \sin\alpha.$

Vậy ma trận chuyển từ hệ Oxy sang $Ox'y'$ là:

$$P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Từ $X = PX'$ với $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ ta suy ra:

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha;$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

Ví dụ 2: Cho không gian R^4 với cơ sở chính tắc:

$$e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)$$

Ta xét một cơ sở mới:

$$e'_1 = (0,1,1,1), e'_2 = (1,0,1,1), e'_3 = (1,1,0,1), e'_4 = (1,1,1,0)$$

Lập công thức chuyển từ các toạ độ chính tắc x_1, x_2, x_3, x_4 của một véc tơ $v \in R^4$ sang các toạ độ x_1', x_2', x_3', x_4' của véc tơ đó theo cơ sở mới.

Ma trận chuyển cơ sở là ma trận có các cột là các toạ độ của các véc tơ e_1', e', e_3', e_4' theo cơ sở chính tắc. Ta có:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} x_1 &= \phantom{x_1' + {}} x_2' + x_3' + x_4' \\ x_2 &= x_1' \phantom{{} + x_2'} + x_3' + x_4' \\ x_3 &= x_1' + x_2' \phantom{{} + x_3'} + x_4' \\ x_4 &= x_1' + x_2' + x_3' \end{aligned}$$

1.5 MA TRẬN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH KHI CHUYỂN CƠ SỞ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : E \to E$, A là ma trận của ánh xạ f đối với cơ sở B của E. P là ma trận chuyển từ cơ sở $B = \{e_1, ..., e_n\}$ sang cơ sở $B' = \{e_1', ..., e_n'\}$. Khi đó ma trận của ánh xạ f trong cơ sở B' sẽ là A'. Ta tìm mối liên hệ giữa A và A'.

Dạng ma trận của ánh xạ f đối với cơ sở B là: $Y = AX$

đối với cơ sở B' là: $Y' = A'X'$ (11)

Vì P là ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở B' nên:

$$X = PX', Y = PY'$$

Từ đó ta có:

$$PY' = Y = AX = APX';$$

ta suy ra: $Y' = P^{-1}PY' = P^{-1}APX'$.

So sánh với (11) ta được: $A' = P^{-1}AP$.

Ta đi tới kết quả sau:

Định lý: *Nếu* A *và* A' *là hai ma trận của một ánh xạ tuyến tính* f *từ không gian* E *vào chính nó đối với hai cơ sở* B *và* B', *và nếu* P *là ma trận chuyển từ cơ sở* B *sang cơ sở* B' *thì:* $A' = P^{-1}AP$

Định nghĩa: *Hai ma trận* A *và* A' *sao cho có một ma trận khả nghịch* P *thoả mãn hệ thức* $A' = P^{-1}AP$ *được gọi là hai* ***ma trận đồng dạng****.*

Như vậy, *các ma trận của cùng một ánh xạ tuyến tính* f *từ* E *vào chính nó trong các cơ sở khác nhau thì đồng dạng với nhau.*

Ví dụ: Xét ánh xạ tuyến tính từ R^3 vào chính nó được cho bởi ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

đối với cơ sở chính tắc trong R^3, $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$

Phép chuyển sang cơ sở mới B' được cho bởi:

$$e_1' = e_1 + 2e_2 + e_3$$
$$e_2' = 2e_1 + e_2 + 3e_3$$
$$e_3' = e_1 + e_2 + e_3$$

Tìm ma trận A' của ánh xạ theo cơ sở mới và cho biểu diễn của ánh xạ đó theo toạ độ trong B'

Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở B' là:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Ta có } P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Từ đó: } A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Biểu thức của ánh xạ tuyến tính trong cơ sở B' là:

$$Y' = AX' \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = x_1' + 3x_2' \\ y_2' = x_2' \\ y_3' = 4x_1' - 2x_2' + 2x_3' \end{cases}$$

Chú ý: Ánh xạ tuyến tính từ không gian véc tơ E vào chính nó còn được gọi là phép biến đổi tuyến tính. Một số phép biến hình mà chúng ta đã được học ở chương trình trung học như phép quay một điểm xung quanh gốc O một góc α, phép vị tự tâm O tỷ số k, phép đối xứng qua một trục toạ độ,…đều là các phép biến đổi tuyến tính.

Chẳng hạn, các ma trận của phép quay một điểm xung quang gốc O một góc α và của phép đối xứng qua trục Oy lần lượt là:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

§2. GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ VÉC TƠ RIÊNG

2.1 ĐỊNH NGHĨA

Giả sử f là một ánh xạ tuyến tính từ không gian véc tơ E vào chính nó (phép biến đổi tuyến tính). Ta đi *tìm các véc tơ $v \in E$ sao cho $f(v)$ tỷ lệ với v,* tức là tìm v sao cho có số λ để $f(v) = \lambda v$

Do $f(v) = 0$ nên véc tơ 0 luôn luôn có tính chất ấy, vì vật ta chỉ đi tìm các véc tơ khác không.

Định nghĩa: *Một véc tơ khác không $v \in E$ được gọi là **véc tơ riêng** của ánh xạ f từ không gian E vào chính nó nếu tồn tại số λ (thực hoặc phức) sao cho $f(v) = \lambda v$. Số λ được gọi là **giá trị riêng** liên kết với véc tơ riêng v.*

Ví dụ Xét phép biến đổi tuyến tính trong R^2 xác định bởi: $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Ta có $f(1,1) = (1,1) = 1(1,1)$ nên số 1 là giá trị riêng ứng với véc tơ riêng $v_1 = (1,1)$. Ta cũng có: $f(1,-1) = (-1,1) = -1(1,-1)$ nên số -1 là một giá trị riêng ứng với véc tơ riêng $v_2 = (1,-1)$.

Ta chú ý rằng phép biến đổi tuyến tính $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ nói trên chính là phép đối xứng qua đường phân giác $y = x$. Những véc tơ nằm trên trục đối xứng sẽ có ảnh là chính chúng, các véc tơ vuông góc với trục đối xứng sẽ có ảnh là các véc tơ đối của chúng.

Nhận xét:

a, Giá trị riêng λ ứng với véc tơ riêng v là duy nhất.

Thật vậy, nếu véc tơ riêng v có hai giá trị riêng là λ và η thì :

$f(v) = \lambda v$ và $f(v) = \eta v$

$\lambda v = \eta v \Leftrightarrow (\lambda - \eta)v = 0$; do $v \neq 0$ nên $\lambda = \eta$

b, Trái lại, một giá trị riêng có thể liên kết với nhiều véc tơ riêng.

Thật vậy, nếu λ là một giá trị riêng liên kết với véc tơ v thì $f(v) = \lambda v$

Giả sử k là một số khác không, do ánh xạ f là tuyến tính ta có:

$f(kv) = kf(v) = k(\lambda v) = \lambda(kv)$

điều đó chứng tỏ kv cũng là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ

2.2 ĐA THỨC ĐẶC TRƯNG

Cho phép biến đổi tuyến tính $f : E \to E$. Giả sử A là ma trận của phép biến đổi đó theo cơ sở $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Ta ký hiệu véc tơ riêng $v \in E$ dưới dạng ma trận cột X thì dạng ma trận của biểu thức $f(v) = \lambda v$ sẽ là:

$$AX = \lambda X \text{ hay } (A - \lambda I)X = 0 \qquad (12)$$

Trong đó I là ma trận đơn vị cùng cấp với ma trận A.

Ta được một hệ n phương trình tuyến tính thuần nhất.

Theo quy tắc Cramer, nếu $\det(A - \lambda I) \neq 0$ thì hệ có nghiệm tầm thường duy nhất $X = 0$.

Vậy để hệ (12) có nghiệm khác không thì cần và đủ là: $\det(A - \lambda I) = 0$

Các giá trị riêng λ của ma trận A hay của ánh xạ f là các nghiệm của phương trình: $\det(A - \lambda I) = 0$ (12')

Định nghĩa: *Định thức $\det(A - \lambda I)$ là một đa thức bậc n đối với λ. Ta gọi nó là **đa thức đặc trưng** của ma trận A; phương trình (12') là **phương trình đặc trưng** của A (hay của ánh xạ f).*

Ví dụ 1. Cho ánh xạ $f : R^2 \to R^2$ bởi ma trận: $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Hãy tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của nó.

Ta có phương trình đặc trưng:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 2 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (6 - \lambda)(3 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$$

Giải phương trình bậc hai đối với λ ta được: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 7$

Để tìm véc tơ riêng liên kết với giá trị riêng $\lambda_1 = 2$ ta giải hệ thuần nhất:

$$(A - \lambda_1 I)X = 0$$

tức là: $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 & = 0 \end{cases}$

Hệ đó tương đương với phương trình: $2x_1 + x_2 = 0$. Có thể cho $x_1 = 1$ khi đó ta có $x_2 = -2$. Véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 2$ là $v_1 = (1, -2)$

Để tìm véc tơ riêng ứng với trị riêng $\lambda_2 = 7$ ta giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 & = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 & = 0 \end{cases}$$

Hệ tương đương với $x_1 - 2x_2 = 0$; cho $x_2 = 1$ thì suy ra $x_1 = 2$

Véc tơ riêng ứng với $\lambda_2 = 7$ là $v_2 = (2, 1)$

Ví dụ 2. Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Phương trình đặc trưng:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] = (1-\lambda)^2(3-\lambda) = 0$$

Nó có nghiệm kép $\lambda_{1,2} = 1$ và nghiệm đơn $\lambda_3 = 3$

Ta xét phương trình $(A - \lambda I)X = 0$

với $\lambda_{1,2} = 1$ ta có: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 & = 0 \\ x_3 & = 0 \end{cases}$

Từ đó $x_3 = 0$, có thể cho $x_1 = x_2 = 1$

Véc tơ riêng ứng với $\lambda_{1,2} = 1$ là $v_1 = (1, 1, 0)$

Với $\lambda_3 = 3$ ta có: $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{cases}$

Từ đó $x_3 = 0$, có thể cho $x_1 = 1, x_2 = -1$

Véc tơ riêng ứng với $\lambda_3 = 3$ là $v_2 = (1, -1, 0)$

2.3 ĐƯA MA TRẬN VUÔNG VỀ DẠNG CHÉO

Ta xét ánh xạ f từ E vào chính nó. Giả sử ma trận A của ánh xạ có n trị riêng thực khác nhau. Ta sẽ chứng tỏ trong trường hợp đó n véc tơ riêng ứng với n trị riêng sẽ lập thành một cơ sở của E.

Định lý: *Giả sử f là một ánh xạ từ không gian n chiều E vào chính nó. Nếu các trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ của f đôi một khác nhau thì các véc tơ riêng tương ứng của chúng $v_1, v_2, ..., v_n$ lập thành một cơ sở của E.*

Chứng minh: Do số chiều của E là n nên ta chỉ còn phải chứng minh n véc tơ $v_1, v_2, ..., v_n$ độc lập tuyến tính.

Giả sử hạng của hệ véc tơ $v_1, v_2, ..., v_n$ là r với $r < n$ (tức là số véc tơ độc lập tuyến tính lớn nhất của hệ là r). Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết đó là r véc tơ đầu $v_1, v_2, ..., v_r$. Khi đó các véc tơ còn lại sẽ là tổ hợp tuyến tính của r véc tơ đó: $v_{r+1} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_r v_r$ (13)

Do f là ánh xạ tuyến tính nên:

$$f(v_{r+1}) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + ... + \alpha_r f(v_r)$$

Các v_i là các véc tơ riêng nên $f(v_i) = \lambda_i v_i$, ta có:

$$\lambda_{r+1} v_{r+1} = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + ... + \alpha_r \lambda_r v_r$$

Thay v_{r+1} bởi (13):

$$\lambda_{r+1}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_r v_r) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + ... + \alpha_r \lambda_r v_r$$

Từ đó: $\alpha_1(\lambda_{r+1} - \lambda_1) v_1 + \alpha_2(\lambda_{r+1} - \lambda_2) v_2 + ... + \alpha_r(\lambda_{r+1} - \lambda_r) v_r = 0$

Vì các véc tơ $v_1, v_2, ..., v_r$ độc lập tuyến tính và các λ_i đôi một khác nhau nên ta suy ra: $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_r = 0$.

Thay vào (13) ta được $v_{r+1} = 0$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết v_{r+1} là véc tơ riêng. Mâu thuẫn đó xuất phát từ chỗ ta giả thiết $r < n$. Vậy phải có $r = n$.

n véc tơ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ độc lập tuyến tính của không gian n chiều E lập thành một cơ sở của không gian đó. Định lý đã được chứng minh.

Bây giờ ta tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính f theo cơ sở $v_1, v_2, \ldots, v_n$ là n véc tơ riêng của không gian đó.

Do:

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1 = (\lambda_1, 0, \ldots, 0)$$
$$f(v_2) = \lambda_2 v_2 = (0, \lambda_2, \ldots, 0)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(v_n) = \lambda_n v_n = (0, 0, \ldots, \lambda_n)$$

Ma trận của ánh xạ là ma trận chéo:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Trong trường hợp này ta nói *ma trận của ánh xạ tuyến tính A đã được chéo hoá*. Như vậy *muốn chéo hoá một ma trận A ta phải lấy một cơ sở của không gian E gồm n véc tơ độc lập tuyến tính của ma trận đó.*

Nếu P là ma trận chuyển từ cơ sở $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sang cơ sở $v_1, v_2, \ldots, v_n$ của không gian E thì theo 1.4 ta có: $D = P^{-1}AP$

Như vậy, *mọi ma trận vuông cấp n A có n giá trị riêng khác nhau từng đôi thì đồng dạng với ma trận chéo D có các phần tử nằm trên đường chéo chính là các giá trị riêng của A.*

Ví dụ: Hãy chéo hoá ma trận A và tìm ma trận chuyển P.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 4\\ 2 & -\lambda & -4\\ -1 & 1 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

Ma trận A có 3 giá trị riêng phân biệt: $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$

Ma trận chéo phải tìm là: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

Để tìm ma trận chuyển ta phải tìm các véc tơ riêng ứng với các giá trị riêng đó.

Với $\lambda_1=1$ ta có $\begin{cases} x_2+4x_3 &= 0\\ 2x_1-x_2-4x_3 &= 0\\ -x_1+x_2+4x_3 &= 0\end{cases} \Rightarrow x_1=0, x_2=-4x_3,$ x_3 tuỳ ý

Chọn $x_3=1$ ta suy ra $x_2=-4$

Véc tơ riêng ứng với $\lambda_1=1$ là $v_1=(0,-4,1)$

Với $\lambda_2=2$ ta có $\begin{cases} -x_1+x_2+4x_3 &= 0\\ 2x_1-2x_2-4x_3 &= 0\\ -x_1+x_2+3x_3 &= 0\end{cases} \Rightarrow x_3=0, x_1=x_2=1$

Véc tơ riêng ứng với $\lambda_2=2$ là $v_2=(1,1,0)$

Với $\lambda_3=3$ ta có $\begin{cases} -2x_1+x_2+4x_3 &= 0\\ 2x_1-3x_2-4x_3 &= 0\\ -x_1+x_2+2x_3 &= 0\end{cases} \Rightarrow x_2=0, x_1=2x_3$

Cho $x_3=1$ ta suy ra $x_1=2$

Véc tơ riêng ứng với $\lambda_3=3$ là $v_3=(2,0,1)$

Ma trận chuyển P là ma trận có các cột là toạ độ của các véc tơ riêng v_1,v_2,v_3

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

nếu tính ma trận nghịch đảo của P ta có:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Có thể nghiệm lại rằng: $D = P^{-1}AP$

Chú ý: Điều kiện đa thức đặc trưng bậc n có n nghiệm phân biệt chỉ là một điều kiện đủ để chéo hoá một ma trận. Trong trường hợp đa thức đặc trưng có nghiệm bội người ta đã chứng minh được rằng nếu vẫn tìm được n véc tơ riêng độc lập tuyến tính thì ta vẫn có thể chéo hoá được ma trận A.

2.4 CHÉO HOÁ TRỰC GIAO

1. Không gian với tích vô hướng

Trong không gian R^n cho hai véc tơ $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$; $v = (y_1, y_2, ..., y_n)$

Định nghĩa: *Tích vô hướng của hai véc tơ u và v, ký hiệu là $u.v$ là một số thực:*

$$u.v = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$

Độ dài hay *chuẩn* của một véc tơ u là: $\|u\| = \sqrt{u.u}$

Hai véc tơ u, v là *trực giao* nếu $u.v = 0$

Hai véc tơ u, v là trực chuẩn nếu chúng trực giao và có độ dài bằng đơn vị

$$u.v = 0; \|u\| = \|v\| = 1$$

Ví dụ: Các véc tơ của cơ sở chính tắc trong R^3:

$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ là các véc tơ trực chuẩn.

Ta chú ý rằng tập các véc tơ trực chuẩn trong R^n là độc lập tuyến tính.

Thật vậy, giả sử $v_1, v_2, ..., v_n$ là các véc tơ trực chuẩn. Ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right).v_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{i \neq j} \alpha_i v_i v_j + \alpha_j v_j v_j = 0 \quad (14)$$

Do các véc tơ v_i trực giao nên $v_i v_j = 0$ với $i \neq j$

Do các véc tơ v_i trực chuẩn nên $v_i v_j = 1$ với $i = j$

Từ (14) ta suy ra: $\alpha_j.1 = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$

Lần lượt cho j các giá trị $1,2,...,n$ ta sẽ có mọi $\alpha_j = 0$. Điều đó chứng tỏ các véc tơ $v_1, v_2, ..., v_n$ độc lập tuyến tính.

2. Chéo hoá trực giao

Định nghĩa: *Nếu ma trận A có n véc tơ riêng trực chuẩn thì việc chéo hoá ma trận A được gọi là **chéo hoá trực giao.***

Trong trường hợp đó ma trận chuyển từ cơ sở $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ sang cơ sở $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ sẽ thoả mãn điều kiện:

$$v_i v_j = \begin{cases} 0 & khi \;\; i \neq j \\ 1 & khi \;\; i = j \end{cases} \tag{15}$$

Ta có thể coi cột v_i của ma trận chuyển P là hàng thứ i của ma trận chuyển vị P^t nên tích vô hướng $v_i v_j$ chính là phần tử ở vị trí (i, j) của ma trận tích $P^t P$. Do (15) ta thấy rằng ma trận tích có các phần tử nằm trên đường chéo chính bằng 1 còn các phần tử khác bằng không, đó là ma trận đơn vị.

Vậy ta có: $P^t P = I$

Mặt khác ta có: $P^{-1} P = I$ ta suy ra: $P^t = P^{-1}$

Định nghĩa: *Ma trận P có tính chất: chuyển vị nó ta được ma trận nghịch đảo, được gọi là **ma trận trực giao**.*

Ví dụ: Ma trận $P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{-}\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ là trực giao vì:

$$P^t = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = P^{-1}$$

Giả sử A là ma trận chéo hoá trực giao được.

Khi đó tồn tại ma trận trực giao P để: $D = P^{-1} A P$

Từ đó suy ra: $A = PDP^{-1} = PDP^t$

Theo tính chất chuyển vị của ma trận tích ta có:

$$A^t = (PDP^t)^t = (P^t)^t D^t P^t = PDP^t = A$$

Điều đó có nghĩa là ma trận A phải là ma trận đối xứng.

Như vậy, nếu *ma trận A có thể chéo hoá trực giao được thì nó phải là ma trận đối xứng.*

Ta thừa nhận rằng, ngược lại nếu ma trận A là ma trận đối xứng thì nó chéo hoá trực giao được.

Để minh hoạ điều đó ta xét ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Nó là ma trận đối xứng. Phương trình đặc trưng:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0.$$

Ta có 3 trị riêng $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$.

Các véc tơ riêng ứng với các trị riêng đó là:

$$v_1 = (1,2,2), v_2 = (2,1,-2), v_3 = (-2,2,-1)$$

Ta có: $v_1v_2 = v_2v_3 = v_3v_1 = 0$, các véc tơ đó trực giao. Bây giờ ta chuẩn hoá chúng (tức là đưa các véc tơ đó về các véc tơ đơn vị).

$$V_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}), \qquad V_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}), \quad V_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = (\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3})$$

Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở gồm các véc tơ trực chuẩn V_1, V_2, V_3 là:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

Dễ dàng kiểm chứng rằng $P^tP = I$.

Ma trận chéo hoá của A là $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

BÀI TẬP

5.1 Trong các ánh xạ $f: R^3 \to R$ sau đây, ánh xạ nào là tuyến tính?

$a)\, f(x,y,z) = 3x + 2y - 5z;$

$b)\, f(x,y,z) = 5x - 3y;$

$c)\, f(x,y,z) = 10x + 4y - 3z + 1$

b

a

5.3 C là không gian véc tơ các số phức. Xét ánh xạ $f: C \to C$ xác định bởi với $z = x + iy \in C;$ ta có $f(z) = (a + bi)z,\ a, b$ là các số thực. Chứng tỏ rằng f là ánh xạ tuyến tính và tìm ma trận của ánh xạ đó.

5.4 Trong không gian véc tơ R^2 cho cơ sở $A = \{(-1,1),(1,-1)\}$. Trong không gian véc tơ R^3 cho cơ sở $B = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$. Hãy tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính $f: R^2 \to R^3$ xác định như sau:

$a)\, f(x,y) = (x, y, x + y);$

$b)\, f(x,y) = (0, x + y, x - y)$

5.8 Ta xét môt ánh xạ $f : R^4 \to R^4$ cho tương ứng mỗi phần tử (x, y, z, t) của R^4 với phần tử $(x + y, y - z, z + x)$ của R^3. Chứng tỏ rằng f là ánh xạ tuyến tính. Tìm một cơ sở của $Kerf$ và của $\operatorname{Im} f$.

5.9 Tìm các trị riêng và các véc tơ riêng của các ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.10 Tìm các trị riêng và các véc tơ riêng của phép biến đổi tuyến tính trong R^2 được cho bởi: $\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = 8x + 9y \end{cases}$

5.11 Tìm trị riêng và véc tơ riêng của phép quay trong không gian xung quanh trục Oz một góc $\frac{\pi}{3}$.

5.12 Đưa các ma trận sau về dạng chéo và tìm ma trận chuyển:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -\sqrt{2} \\ 2 & 4 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.13 Chứng tỏ rằng ta không chéo hoá được ma trận: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

5.14 Chứng tỏ rằng các ma trận đồng dạng có cùng phương trình đặc trưng.

5.15 Có thể chéo hoá trực giao các ma trận sau được không? Nếu được hãy tìm ma trận chuyển tương ứng: $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$